Capítulo 3

Series de potencias, series de Taylor y series de Laurent

3.1. Series de potencias

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $(a_n) \subset \mathbb{C}$. Llamaremos **serie de potencias** centrada en z_0 de coeficientes complejos a_n a la toda suma infinita (de funciones) de la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0) + ... \tag{3.1}$$

Cuando exista una función $f(x)$ de forma que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

diremos que la serie de potencias es **convergente o sumable** a f. El siguiente resultado pone de manifiesto que una serie de potencias puede converger en un disco abierto (este es el caso general), en todo el plano complejo, o bien converge sólo en el centro z_0 (en cuyo caso la serie de potencias es prácticamente inútil pues se reduce a un punto).

Teorema 3.1.1 ***Criterio de convergencia absoluta para series de potencias***

Para la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ *consideremos el límite*

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \tag{3.2}$$

Se verifica:

(i) Cuando $L = +\infty$ *la serie de potencias (3.1) converge únicamente en* $z = z_0$.

(ii) Cuando $L = 0$ *la serie de potencias converge para todo* $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Si $L > 0$ *la serie converge absolutamente si* $z \in D\left(z_0, \frac{1}{L}\right)$ *y diverge si* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}\left(z_0, \frac{1}{L}\right)$.

Al disco $D(z_0, R)$ donde $R = \frac{1}{L}$ lo llamaremos disco de convergencia de la serie. Por convenio, cuando $L = +\infty$ tomamos $R = 0$ y cuando $L = 0$ tomamos $R = 0$ (observar que $D(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$).

Ejemplo 1 ***Convergencia en un disco***

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots$$

Ejemplo 2 ***Convergencia en*** $\mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

Ejemplo 3 ***Convergencia en un punto***

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n = 1 + z + 2z^2 + \ldots$$

El objetivo principal del siguiente teorema es poner de manifiesto que las series de potencias representan funciones holomorfas.

Teorema 3.1.2 ***Holomorfía de las series de potencias en su disco de convergencia***

Sea $R > 0$ *y supongamos que* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ *para todo* $z \in D(z_0, R)$. *Entonces,* $f \in \mathcal{H}(D(z_0, R))$ *con*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \qquad \text{con } z \in D(z_0, R) \tag{3.3}$$

y

$$\int f(z)\ dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} \qquad \text{con } z \in D(z_0, R)$$

Ejemplo 4 *La serie geométrica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + ...$$

3.2. Series de Taylor

Puesto que el radio de convergencia de la serie (3.3) coincide con R, la función derivada f' también es holomorfa en $D(z_0, R)$ y su derivada, $f''(z)$ se obtiene derivando término a término la serie (3.3). Por consiguiente, reiterando el mismo argumento, las derivadas de cualquier orden de f son funciones holomorfas en el disco de convergencia $D(z_0, R)$ y están determinadas por las series de potencias

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-(k-1))\, a_n (z - z_0)^{n-k}$$

si $z \in D(z_0, R)$ y $k \geq 1$. En particular, evaluando en z_0, se obtiene que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad \text{si } k \geq 0.$$

Teorema 3.2.1 ***de Taylor***

*Sea f una función holomorfa en $D(z_0, R) \subseteq \mathbb{C}$ con $R \neq 0$. Entonces existe una serie de potencias con centro en z_0 que representa a $f(z)$. Esta serie es la **serie de Taylor***

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{en donde } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

*A sus coeficientes se los denomina **coeficientes de Taylor**. En el caso particular en que $z_0 = 0$ la serie de Taylor se conoce con el nombre de **serie de McLaurin**.*

3.2.1. Algunas series de McLaurin

Son como en Cálculo, con x sustituida por el complejo z.

Series geométricas

Sea $f(z) = \dfrac{1}{1-z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{1\})$, por lo que consideraremos la función holomorfa en un disco de centro $z_0 = 0$ y radio máximo, es decir, $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ el radio máximo Entonces se tiene que

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad f''(z) = \frac{1\cdot 2}{(1-z)^3}, \quad f'''(z) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-z)^4}$$

y

$$f^{(n)}(z) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{(1-z)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}.$$

De esta forma la serie de McLaurin será

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{n!}{(1-0)^{n+1}}}{n!}(z-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

es decir,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad \text{con } |z| < 1. \tag{3.4}$$

La función exponencial[1]

Sea $f(z) = e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Entonces se tiene que

$$f'(z) = f''(z) = f'''(z) = e^z$$

y

$$f^{(n)}(z) = e^z.$$

De esta forma la serie de McLaurin será

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^0}{n!}(z-0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

es decir,

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{3.5}$$

[1] Si se toma $z = ix$, es decir, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, y separando la serie en las partes reales e imaginarias se obtienen las series de McLaurin de las funciones reales $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$

Funciones trigonométricas

Como sabemos que $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ es una función entera se tiene que

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n}z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^{2n}z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} - i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots
\end{aligned}$$

En definitiva[2]

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \tag{3.6}$$

y, de forma similar, obtenemos para el seno

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

Funciones hiperbólicas

De forma análoga al sustituir la serie (3.5) en las expresiones

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

se obtiene que

[2]Cuando $z = x$, las expresiones anteriores son las series de McLaurin de las funciones reales $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \qquad (3.8)$$

y

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \quad (3.9)$$

3.2.2. Métodos prácticos

En la mayor parte de los casos puede ser complicado o consumir mucho tiempo determinar los coeficientes de la serie de Taylor a partir de la fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad \text{con } n \geq 0.$$

Nuestro propósito es estudiar formas más sencillas y más rápidas para obtener la serie de Taylor (de McLaurin) de una función. No importa el método usado ya que si una función puede desarrollarse en una serie de potencias con centro en z_0, entonces el **desarrollo es único.**

Ejemplo 5 ***Desarrollo usando la serie geométrica/Sustitución***
Obtener la serie de McLaurin de

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

Ejemplo 6 ***Desarrollo usando la serie geométrica/Sustitución***

Desarrollar en potencias de $z-2$ la función

$$f(z) = \frac{1}{2-3z}$$

Ejemplo 7 ***Derivación***
Desarrollar en potencias de $z-1$ la función

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2}$$

Ejemplo 8 ***Integración***

Determinar la serie de McLaurin de la función

$$f(z) = \arctan z$$

Ejemplo 9 ***Reducción en fracciones simples***

Desarrollar en potencias de $z-1$ la función

$$\frac{2z^2+9z+5}{z^3+z^2-8z-12}$$

Ejemplo 10 ***Uso de ecuaciones diferenciales***

Obtener la serie de McLaurin de

$$f(z) = \tan z.$$

3.3. Series de Laurent

En aplicaciones, a menudo es necesario desarrollar una función $f(z)$ alrededor de puntos en los cuales ya no es holomorfa, sino que presenta una singularidad. Así el Teorema de Taylor deja de ser aplicable, por lo que se requiere un nuevo tipo de series, denominadas series de Laurent, que constan de potencias enteras positivas y negativas de $z-z_0$ y que son convergentes en algún anillo (acotado por dos círculos de centro z_0) en donde $f(z)$ es holomorfa. En definitiva, $f(z)$ puede tener puntos singulares no sólo fuera del círculo más grande (como en las series de Taylor) sino también dentro del círculo más pequeño.

Recordar que

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\}$$

Para las series de Laurent es posible demostrar un teorema análogo al Teorema 3.2.1 para series de Taylor.

Teorema 3.3.1 ***Representación de una función por su serie de Laurent***

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 \le r < R \le +\infty$. Si $f \in \mathcal{H}(A(z_0, r, R))$, entonces existen constantes a_n y $b_n \in \mathbb{C}$, de forma que $f(z)$ puede representarse mediante la ***serie de Laurent*** *centrada en z_0*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad si\ z \in A(z_0, r, R). \qquad (3.10)$$

Resulta evidente que toda serie de Laurent está formada por una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

llamada **parte regular** de la serie de Laurent, con radio de convergencia R y la serie funcional

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

llamada **parte singular o principal** de la serie de Laurent, con radio de convergencia $\frac{1}{r}$.

Evidentemente, toda serie de potencias es una serie de Laurent cuando los coeficientes de la parte singular son todos nulos. También resulta evidente que en vez de escribir (3.10), es posible escribir (denotando b_n por a_{-n})

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

3.3.1. Métodos prácticos

El Teorema (3.3.1) no es demasiado útil en la práctica para obtener los coeficientes del desarrollo en serie de Laurent de una función. En esta sección estudiaremos cómo usar métodos alternativos para la obtención de las mismas.

Ejemplo 11 ***Uso de la serie de McLaurin***

Determinar la serie de Laurent de $z^{-5} \operatorname{sen} z$ con centro en $z_0 = 0$.

Ejemplo 12 ***Sustitución***

Determinar la serie de Laurent de $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ con centro en $z_0 = 0$.

Ejemplo 13 ***Desarrollos de Laurent en coronas concéntricas diferentes***

Encontrar todas las series de Laurent de $\frac{1}{z^3 - z^4}$ con centro en $z_0 = 0$

Ejemplo 14 ***Uso de fracciones parciales***

Encontrar todas las series de Taylor y de Laurent de $f(z) = \dfrac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ con centro en $z_0 = 0$

3.4. Singularidades y ceros

Diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es una **singularidad aislada** de una función f si existe $\delta > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0, \delta))$, es decir, si podemos determinar un entorno en el que z_0 sea la única singularidad de la función. A partir de este momento nos restringiremos al estudio de las singularidades aisladas.

Una característica fundamental de las singularidades aisladas es que la función puede escribirse como una serie de Laurent alrededor de la singularidad en un entorno reducido de la misma. Así, si z_0 es una singularidad aislada, existe $\delta > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0, \delta))$ y, consecuentemente, aplicando el Teorema 3.3.1 obtenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad \text{si } z \in A(z_0, 0, \delta) = D^*(z_0, \delta).$$

Usando este hecho distinguiremos tres clases de singularidades aisladas:

(1) Diremos que z_0 es una **singularidad evitable** de f si la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor de dicho punto es nula, es decir, si $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

(2) Diremos que z_0 es un **polo** de f si la parte principal de la serie de Laurent de f alrededor de z_0 tiene una cantidad finita de sumandos, entonces es de la forma

$$\frac{b_1}{z-z_0} + ... + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \qquad \text{con } b_m \neq 0$$

A m lo llamaremos **orden del polo.**

(3) Diremos que f tiene una **singularidad esencial** en z_0 cuando la parte principal de la serie de Laurent tiene infinitos términos.

Ejemplo 15 *Clasificar las singularidades de las siguientes funciones:*

(i) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

(ii) $g(z) = \dfrac{e^z}{z+1}$.

(iii) $h(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$.

El siguiente resultado caracteriza las singularidades de una función mediante el valor del límite de la función cuando hacemos tender la variable independiente hacia la singularidad aislada.

Teorema 3.4.1 ***de caracterización de las singularidades***
Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0,\delta))$. Se verifica:

(1) *z_0 es una singularidad evitable si y sólo si existe el límite $l \in \mathbb{C}$ de f cuando $z \longrightarrow z_0$. En este caso, se verifica además que la función*

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & si \quad z \in D^*(z_0,\delta) \\ l & si \quad z = z_0 \end{cases}$$

es holomorfa en $D(z_0,\delta)$.

(2) *z_0 es un polo si y sólo si $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \infty$. Además el polo es de orden m si existe el límite*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

y no es cero ni infinito.

(3) *z_0 es una singularidad esencial si y sólo si no existe $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z)$.*

Ejemplo 16 *Clasificar las singularidades de las siguientes funciones:*

(i) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

(ii) $g(z) = \dfrac{e^z}{z+1}$.

(iii) $h(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$.

3.4.1. Ceros de funciones holomorfas

Diremos que una función holomorfa en un dominio D tienen un **cero** en un punto $z_0 \in D$ si $f(z_0) = 0$. También diremos que este cero es de orden n si también todas las derivadas $f', f'', ..., f^{(n-1)}$ son iguales a cero en z_0 pero $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Un cero de primer orden también se denomina **cero simple.**

Ejemplo 17 *Determinar los ceros de las siguientes funciones:*

(i) $1 + z^2$

(ii) $(1 + z^4)^2$

(iii) e^z.

(iv) $\operatorname{sen} z$ *y* $\sin^2 z$.

(v) $1 - \cos z$ *y* $(1 - \cos z)^2$

En un cero z_0 de orden m de f las derivadas $f', f'', ..., f^{(m-1)}$ son cero. Así, los primeros coeficientes $a_0, a_1, ..., a_{m-1}$ de la serie de Taylor también son cero en tanto $a_m \neq 0$, de modo que la serie asume la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + ... \\ &= (z - z_0)^m \left(a_m + a_{m+1} (z - z_0) + a_{m+2} (z - z_0)^2 + ...\right) \\ &= (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{+\infty} a_{m+k} (z - z_0)^k . \end{aligned}$$

Lo anterior es característico de un cero así, porque si $f(z)$ posee tal serie de Taylor, entonces tiene un cero de m-ésimo orden en z_0, como se concluye por diferenciación.

Ejemplo 18 *Determinar el orden de los ceros de la función* $g(z) = 1 + \cos z$.

Aunque es posible que ocurran singularidades no aisladas, para los ceros se tiene.

Teorema 3.4.2 ***Ceros de una función holomorfa***

Los ceros de una función holomorfa f son aislados, es decir, para cada uno de ellos existe un entorno que no contiene otros ceros de f.

Los polos a menudo son provocados por ceros en el denominador (por ejemplo $\tan z$ tiene polos donde $\cos z$ es cero) Esta es una de las razones primordiales que explican la importancia de los ceros. La clave de la relación es el siguiente resultado

Teorema 3.4.3 ***Polos y ceros de funciones holomorfas***

Sean f, g dos funciones holomorfas en z_0 con $f(z_0) \neq 0$. El punto z_0 es un polo de orden m en $\frac{f}{g}$ si y sólo si g tiene un cero de orden m en z_0.

Ejemplo 19 *Determinar los polos de la función*

$$\frac{1}{z\left(e^{z}-1\right)}$$

3.5. Transformada $\mathcal{Z}$

La transformada $\mathcal{Z}$ de una sucesión $(x_k)_{-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ se define como la serie de Laurent

$$\mathcal{Z}\left[x_k\right](z) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x_n}{z^n}$$

siempre que

Para sucesiones que son causales, es decir, que $x_k = 0$ para $k < 0$ la transformada z se reduce a

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{z^n} = x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{z^n}. \tag{3.11}$$

A partir de ahora trabajaremos exclusivamente con sucesiones causales, aunque hay que tener en cuenta que las sucesiones no causales son de importancia y aparecen, de forma particular, en los campos de procesamiento digital de imágenes, entre otros.

Observar que 3.11 es una serie de Laurent con parte regular x_0 y parte singular $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n z^{-n}$, y que por tanto convergerá en un disco de convergencia de la forma

$$A(0, r, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$$

donde r es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n z^n$.

Ejemplo 20 *Determinar la transformada z de la sucesión* $\delta = (1, 0, 0, 0, ...)$

Ejemplo 21 *Determinar la transformada z de la sucesión* $x_k = (1, 1, 1, ...)$

Ejemplo 22 *Determinar la transformada z de la sucesión* $\left(2^k\right)$

3.5.1. Propiedades básicas

Sean x_k e y_k dos sucesiones de números complejos y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica,

(1) $\mathcal{Z}[\alpha x_k + \beta x_k](z) = \alpha \mathcal{Z}[x_k](z) + \beta \mathcal{Z}[y_k](z)$ para todo en el dominio de definición de $\mathcal{Z}[x_k](z)$ y $\mathcal{Z}[y_k](z)$.

(2) Primera propiedad de traslación **Avance**.

Supongamos que $y_k = x_{k+1}$. Entonces

$$\mathcal{Z}[y_k](z) = z\mathcal{Z}[x_k](z) - zx_0.$$

En general, si $k_0 \in \mathbb{N}$ y definimos $y_k = x_{k+k_0}$, tenemos la fórmula

$$\mathcal{Z}[x_{k+k_0}](z) = z^{k_0}\mathcal{Z}[x_k](z) - \sum_{n=0}^{k_0-1} x_n z^{k_0-n}.$$

(3) Segunda propiedad de traslación **Retraso**

En general, si $k_0 \in \mathbb{N}$ y definimos $y_k = x_{k-k_0}$, tenemos la fórmula

$$\mathcal{Z}[x_{k-k_0}](z) = z^{-k_0}\mathcal{Z}[x_k](z).$$

(4) Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se verifica

$$\mathcal{Z}\left[a^k x_k\right](z) = \mathcal{Z}[x_k]\left(\frac{z}{a}\right).$$

Ejemplo 23 *Determinar la transformada z de la sucesión*

$$x_k = \left(1, 2, 2^2, 2^3, ...\right)$$

---

5. Sea $m \in \mathbb{N}$. Se verifica

$$\mathcal{Z}\left[k^m x_k\right](z) = \left[-z\frac{d}{dz}\right]^m \mathcal{Z}\left[x_k\right](z)$$

donde $-z\frac{d}{dz}$ se entiende como la operación derivada y luego multiplicación por $-z$.

Ejemplo 24 *Determinar la transformada z de la sucesión*

$$x_k = \left(1, 2^2, 3^2, 4^3, ...\right) = \left(k^2\right)$$

3.5.2. La transformada $\mathcal{Z}$ inversa

Ahora nos planteamos el problema de obtener un sucesión (x_k) a partir del conocimiento de su transformada $X(z)$. Estableceremos la siguiente equivalencia

$$\mathcal{Z}\left[x_k\right](z) = X(z) \Longleftrightarrow x_k = \mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right].$$

AL operador $\mathcal{Z}^{-1}$ le llamaremos operador transformación inversa $\mathcal{Z}$ y a la sucesión (x_k) la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de la función $X(z)$.

Recordar que la transformada $\mathcal{Z}$ de una sucesión es una serie de Laurent centrada en cero, por lo que para calcular la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de una función bastará con calcular el desarrollo en serie de Laurent, centrada en cero, de dicha función en un anillo de la forma $A(0, r, +\infty)$ con $r \geq 0$.

Ejemplo 25 *Determinar la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de la función* $X(z) = \frac{z}{z-2}$

Frecuentemente necesitaremos determinar transformadas $\mathcal{Z}$ inversas de funciones racionales. En este caso el procedimiento consiste en descomponer en fracciones simples dicha función.

Ejemplo 26 *Determinar la transformada $\mathcal{Z}$ inversa de la función* $X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$.

3.5.3. Aplicación a la resolución de la ecuación en diferencias

Supongamos que la sucesión de observaciones (x_k) está siendo grabada y recibimos la observación x_k en el paso (tiempo) k.

Ejemplo 27 *Resolver el siguiente problema*

$$\begin{cases} y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 1 \\ y_0 = 0,\ y_1 = 1 \end{cases}$$

de ecuaciones en diferencias finitas.

Ejemplo 28 *Resolver el siguiente problema*

$$\begin{cases} y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_k = 1 \\ y_0 = y_1 = 0 \end{cases}$$

de ecuaciones en diferencias finitas.
